Тәжірибелік сабақ 12

Шеңбер үшін ішкі және сыртқы Дирихле есебінің шешуі. Грин функциясы.Шар үшін Дирихле есебі.

Сыртқы Дирихле есебі:

$$\Delta U = 0,\ 1 < r < \infty,\ 0 < \varphi \le 2\pi \qquad (1)$$

теңдеуінің

$$U\big|_{r=1} = g(\varphi),\ 0 \le \varphi < 2\pi \qquad (2)$$

шекаралық шартты және $r \to \infty$ кезде шенелген болатын шешімін табу есебін қарастырайық.

1-2 қадам сыртқы Дирихле есебі үшін де өзгермейді. Ал, үшінші қадамда Эйлер теңдеуінің $V(r)$ дербес шешімдерін таңдаған кезде $A_n r^n$ және $B_0 \ln r$ функцияларын алып тастау керек, өйткені олар $r \to \infty$ кезде шенелмеген. Сондықтан, Эйлер теңдеуінің дербес шешімдерінің ішінен $r \to \infty$ кезде шенелген болатын $V_n = B_n r^{-n},\quad n = 0,1,2...$ шешімдерін алу керек. Демек, Лаплас теңдеуінің дербес шешімдері

$$U_n = r^{-n}\left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right) \qquad (3)$$

формуласы арқылы беріледі. Мұндағы $a_n = B_n c_n^1,\ b_n = B_n c_n^2$ - кез келген тұрақтылар.

Сонымен, қорыта келгенде, жоғарыдағы сыртқы Дирихле есебінің сыртқы облысы үшін шешімі

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}\left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right), \qquad (4)$$

мұндағы белгісіз a_n, b_n еселіктер шекараның (2) шарт орындалатын жағдайдан анықталады:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi d\varphi, \qquad (5)$$

Бұл (5) еселіктерді (4) есептің шешіміне қойып, түрлендіргеннен соң, ол шешім мынандай түрде жазылады:

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - 1}{1 - 2r\cos(\varphi - \alpha) + r^2} g(\alpha) d\alpha$$

Есептің шешімінің бұл формадағы түрін сыртқы дөңгелек үшін *Пуассон интегралы* деп атайды.